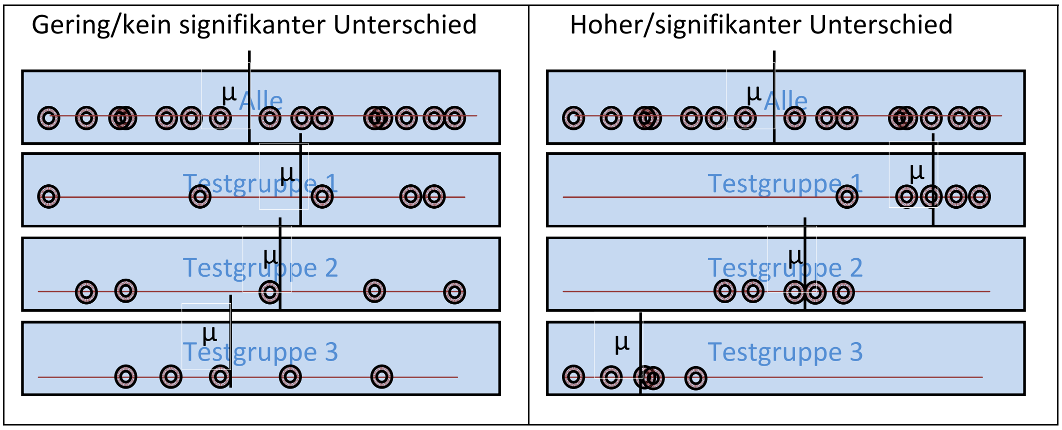
**Fragestellung der Varianzanalyse**

Die Varianzanalyse beantwortet Fragestellungen, wie sich eine (einfaktorielle V.) oder mehrere (mehrfaktorielle V.) unabhängige Variablen (hier: ***Faktoren***) auf eine (univariate V.) oder mehrere abhängige Variablen (multivariate V.) auswirken. Einfach ausgedrückt, geht es um die Aufdeckung von Mittelwert*unterschieden* von mehr als zwei Teilpopulationen. Bei zwei Gruppen lässt sich vereinfachend ein t-Test (Vergleich zweier Normalverteilungen) ausführen. Bei mehr als zwei Gruppen ist der t-Test aufgrund seiner Fehlerpotenzierung ungeeignet.

**Funktionsprinzip**




Die damit verbundene Hypothesenformulierung lautet also stets:

**$H_0$: Die Mittelwerte der Grundgesamtheit sind gleich**
**$H_1$: Mindestens zwei Mittelwerte unterscheiden sich signifikant**

**Modellannahmen**

- AV ist in der Grundgesamtheit normalverteilt, mit in den Teilpopulationen gleicher Varianz
- Die Werte der AV sind bei den Merkmalsträgern unabhängig voneinander
- Der Erwartungswert der AV hängt nur von der jeweiligen Faktorstufe der UV ab, ist innerhalb der Teilpopulationen also konstant
- Es wird von einem linearen Zusammenhang zwischen UV(en) und der AV ausgegangen

**Grundablauf der *einfaktoriellen* Varianzanalyse**

1. Formulierung der AV, UV, Prüfung des Skalenniveaus, Formulierung der Fragestellung
2. Zerlegung der Gesamtvarianz in die Varianz innerhalb und zwischen den Gruppen
3. Test, ob Abweichungen auf Zufallsstreuungen bei der Stichprobenauswahl oder auf systematische Abweichungen auch in der Grundgesamtheit zurückzuführen sind.

**1. a) AV oder UV?**

| UV (X) | AV (Y) |
|---|---|
| Vorgegeben oder vom Versuchsleiter variiert. Prädiktor, Ursache, Einflussgröße, **Faktor** | Variabel als Reaktion auf X. Wirkung, Response, **Zielvariable** |

**1. b) Skalenniveau:**

Die ***AV*** erfordert ***metrische*** (mindestens Intervall-) ***Skala***, für ***UV*** reicht ***Nominalskalierung***.

**1. c) Formulierung** (am Beispiel einer 3 x 3-Matrix über die Auswirkung unterschiedlicher Lernverfahren auf das Prüfungsergebnis dreier Gruppen):

| s | Gruppe 1 (UV = normales Lernen) | Gruppe 2 (UV, Var 1 = Videotraining) | Gruppe 3 (UV, Var 2 = Lerngruppe) |
|---|---|---|---|
| 1 | 46 | 38 | 43 |
| 2 | 36 | 36 | 59 |
| 3 | 53 | 43 | 51 |

UV: Faktor mit 3 **Faktorstufen**!

AV: Klausurpunkte

**Fragestellung: Haben die unterschiedlichen Lernverfahren Einfluss auf die Klausurpunkte ?**

**2. Varianzzerlegung**

Für die Teststatistik wird die Varianzzerlegung der Gesamtvarianz $SQ_{Total}$ in die Varianz innerhalb der Gruppen $SQ_{Residual}$ und die Varianz zwischen den Gruppen $SQ_{zwischen}$ ausgenutzt. Der Ansatz besteht darin, den Anteil der $SQ_{Residual}$ , der eher auf Zufallseffekten beruht (= ***Reststreuung,*** *Fehlerstreuung*), und den Anteil , der durch die eigentliche UV-Variation (= ***Treatment-Variable,*** *Behandlungseffekt*) entsteht, aus der Gesamtstreuung zu ermitteln. Es gilt somit:

$SQ_{Total} = SQ_{zwischen} + SQ_{Residual}$ , wobei

$SQ_{Total} = \sum_{i=1}^{s} \sum_{k=1}^{n_i} (y_{ik} - \bar{y}_{..})^2$

(= Summe aller quadrierten Differenzen aller Einzelwerte und dem Gesamtmittelwert)

$SQ_{zwischen} = \sum_{i=1}^{s} n_i \cdot (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2$

(= Summe aller quadrierten Differenzen der jeweiligen Gruppenmittelwerte und dem Gesamtmittelwert, wobei mit der Gruppenanzahl multipliziert wird)

$SQ_{Residual} = \sum_{i=1}^{s} \sum_{k=1}^{n_i} (y_{ik} - \bar{y}_{i.})^2$

(= Summe aller quadrierten Differenzen der jeweiligen Gruppeneinzelwerte vom jeweiligen Gruppenmittelwert)

***<u>Beispielrechung aus 1 c)</u>***

| Gruppe 1 | Gruppe 2 | Gruppe 3 |
|---|---|---|
| 46 | 38 | 43 |
| 36 | 36 | 59 |
| 53 | 43 | 51 |
| $\bar{y}_{.} = 45$ | $\bar{y}_{.} = 39$ | $\bar{y}_{.} = 51$ |

$\bar{y}_{..} = 45$

$$SQ_{Total} = (46-45)^2 + (36-45)^2 + (53-45)^2 + (38-45)^2 + (36-45)^2 + (43-45)^2 + (43-45)^2 + (59-45)^2 + (51-45)^2 = \underline{\underline{516}}$$

$$SQ_{zwischen} = (45-45)^2 + (45-45)^2 + (45-45)^2 + (39-45)^2 + (39-45)^2 + (39-45)^2 + (51-45)^2 + (51-45)^2 + (51-45)^2 = \underline{\underline{216}}$$

$$SQ_{Residual} = SQ_{Total} - SQ_{zwischen} = (46-45)^2 + (36-45)^2 + (53-45)^2 + (38-39)^2 + (36-39)^2 + (43-39)^2 + (43-51)^2 + (59-51)^2 + (51-51)^2 = \underline{\underline{300}}$$

**3. Hypothesentest**

Als Testverteilung dient die ***F-Verteilung*** mit ***s - 1*** und ***n - s Freiheitsgraden*** zum (vorab festzulegenden) Signifikanzniveau $\alpha$. Wenn das Ergebnis des F-Tests in den Ablehnungsbereich $\alpha$ fällt, wird die Alternativhypothese $H_1$ angenommen. Fällt es hingegen in den Annahmebereich 1- $\alpha$**,** ist die Nullhypothese zu bestätigen (und somit ein fehlender Einfluss der untersuchten Faktoren zu konstatieren).

$$\mathbf{F:=}\ \frac{n-s}{s-1}\cdot\frac{SQ_{zwischen}}{SQ_{Residual}}$$ | s = Stichprobenanzahl, n = Elementesumme

***Beispielrechung aus 1 c)***

Es sei $\alpha$ = 10 % angenommen.

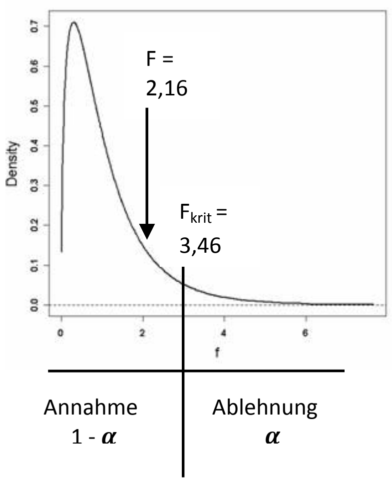
$$\mathbf{F:=}\ \frac{n-s}{s-1}\cdot\frac{SQ_{zwischen}}{SQ_{Residual}} = \frac{9-3}{3-1}\cdot\frac{216}{300} = 3\cdot 0{,}72 = \underline{\underline{2{,}16}}$$

$$F_{krit} = F_{s-1;\ n-s;\ 1-\alpha} = F_{2;\ 6;\ 0,9}$$

Nachschlagen in den Quantilen der F-Verteilung für p = 0,9 (einseitig):

| df₂ (Nenner) | df₁ (Zähler) | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 1 |
| 1 | 39,86 | 49,50 | 53,59 | 55,83 | 57,24 | 58,20 | 58,91 | 59,44 | 59,86 | 60,19 | 60,47 |
| 2 | 8,53 | 9,00 | 9,16 | 9,24 | 9,29 | 9,33 | 9,35 | 9,37 | 9,38 | 9,39 | 9,40 |
| 3 | 5,54 | 5,46 | 5,39 | 5,34 | 5,31 | 5,28 | 5,27 | 5,25 | 5,24 | 5,23 | 5,22 |
| 4 | 4,54 | 4,32 | 4,19 | 4,11 | 4,05 | 4,01 | 3,98 | 3,95 | 3,94 | 3,92 | 3,91 |
| 5 | 4,06 | 3,78 | 3,62 | 3,52 | 3,45 | 3,40 | 3,37 | 3,34 | 3,32 | 3,30 | 3,28 |
| 6 | 3,78 | 3,46 | 3,29 | 3,18 | 3,11 | 3,05 | 3,01 | 2,98 | 2,96 | 2,94 | 2,92 |
| 7 | 3,59 | 3,26 | 3,07 | 2,96 | 2,88 | 2,83 | 2,78 | 2,75 | 2,72 | 2,70 | 2,68 |
| 8 | 3,46 | 3,11 | 2,92 | 2,81 | 2,73 | 2,67 | 2,62 | 2,59 | 2,56 | 2,54 | 2,52 |

Darstellung an der Verteilungskurve




Da die Teststatistik im Annahmebereich liegt, ist die ***Nullhypothese zu bestätigen***. Die Gruppen-mittelwerte stimmen überein und es besteht kein signifikanter Einfluss der Faktorstufen auf die Zielvariable.